в случаях пар ($t = 3$, $s = 0$), ($s = 3$, $t = 0$), которые соответствуют точкам множества $\mathcal{K}_{n_3}$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Mellin H. *Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma* // C.R. Acad. Sci., Paris Sér. – 1921. – V. 172. – P. 658-661.

2. Nilsson L. *Amoebas, discriminants, and hypergeometric functions* // Doctoral thesis. – Department of Mathematics, Stockholm University, Sweden, 2009.

3. Антипова И. А. *Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений* // Матем. сб. – 2007. – Т. 198. – № 4. – С. 3-20.

**Н. А. Ибрагимова**

*Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, ibnailya@yandex.ru*

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Пусть $\mathbb{E}^+{}_p$ — полупространство $x_p > 0$ $p$-мерного евклидова пространства $\mathbb{E}_p$ точек $x = (x', x_p)$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ $D$ — конечная область в $\mathbb{E}^+{}_p$, ограниченная открытой частью $\Gamma_0$ гиперплоскости $x_p = 0$ и гиперповерхностью $\Gamma$.

Рассмотрим в $\mathbb{E}^+{}_p$ $B$-эллиптическую систему уравнений вида

$$L_B[u] = \Delta_B u + Au = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_B = \Delta_{x'} + B_{x_p}$, $\Delta_{x'} = \sum\limits_{l=1}^{p-1} \dfrac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ — лапласиан, $B_{x_p} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \dfrac{k}{x_p}\dfrac{\partial}{\partial x_p}$ — оператор Бесселя, $k > 0$ $A = (a_{ij})$ — симметрическая матрица порядка $m$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ $\left(u^T = (u_1\, u_2 \ldots u_m)\right)$ — искомая вектор-функция.

**1. Формулы Грина.** Обозначим через $C_B^2(D)$ множество вектор-функций, дважды непрерывно-дифференцируемых в $D$ и удовлетворяющих условию $\dfrac{\partial u_j(x',0)}{\partial x_p} = 0$, $j = \overline{1,m}$, а через $C_0^\infty(E^+{}_p)$ — множество всех бесконечно непрерывно дифференцируемых и финитных в $\mathbb{E}^+{}_p$ вектор-функций.

Пусть $u$, $v^T \in C^1(\overline{D}) \cap C_B^2(D)$. Нетрудно доказать, что имеют место формулы

$$\int_D v^T L_B[u] x_p^k\,dx = -\int_D x_p^k \left[\sum_{l=1}^{p-1} \frac{\partial v^T}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{\partial v^T}{\partial x_p}\frac{\partial u}{\partial x_p}\right] dx + \int_\Gamma v^T \frac{\partial u}{\partial n} x_p^k d\Gamma + \int_D v^T A u x_p^k dx, \quad (2)$$

$$\int_D \left[v^T L_B[u] - L_B[v^T]u\right] x_p^k dx = \int_\Gamma \left[v^T \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial v^T}{\partial n} u\right] x_p^k d\Gamma, \quad (3)$$

где $n$ — внешняя нормаль к $\Gamma$.

Формулы (2), (3) называются соответственно первой и второй формулами Грина для оператора $L_B$.

**2. Фундаментальная матрица решений с особенностью в произвольной точке.** Фундаментальная матрица решений системы (1) с особенностью в начале координат найдена в [1] и имеет вид

$$\Phi(r) = \begin{pmatrix} \varphi_1(r) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_2(r) & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_m(r) \end{pmatrix},$$

где

$$\varphi_j(r) = \sigma_j r^{-\nu} \mathrm{H}_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda_j}\, r), \quad r = |x|,$$

$$\sigma_j = \frac{\lambda_j^{\nu/2}}{i 2^{\nu+1} \pi^{\frac{p-3}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Применим к $\Phi(r)$ оператор обобщенного сдвига $T_x^{x_0}$ и обозначим полученную матрицу через $G(x, x_0)$

$$G(x, x_0) = \begin{pmatrix} g_1(x, x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2(x, x_0) & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_m(x, x_0) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Диагональными элементами матрицы (4) являются

$$g_j(x, x_0) = T_x^{x_0} \varphi_j(r) = C_k \sigma_j \int_0^\pi \rho_\varphi^{-\nu} \mathrm{H}_\nu^{(1)}(\sqrt{\lambda}_j\, \rho_\varphi) \sin^{k-1} \varphi \, d\varphi,$$

где

$$C_k = \frac{\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}, \quad \rho_\varphi = \left(|x' - x_0'|^2 + x_p^2 + x_{p0}^2 - 2 x_p x_{p0} \cos\varphi\right)^{1/2},$$

$$\nu = \frac{p + k - 2}{2}, \quad j = \overline{1, m}.$$

**Определение.** *Матрица $G(x, x_0)$ называется фундаментальной матрицей решений системы* (1) *с особенностью в точке $x_0 \in \mathbb{E}_p^+$, если она удовлетворяет условиям*

1) *для любой вектор-функции* $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$,

$f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{E}_p^+)$, *такой, что* $x_0 \in \operatorname{Supp} f(x)$, *имеет место равенство*

$$\int_{\mathbb{E}_p^+} G(x, x_0) L_B[f(x)] x_p^k \, dx = f(x_0);$$

2) $G(x, x_0)$ *является решением системы* (1) *во всех точках* $\mathbb{E}_P^+$, *за исключением точки* $x_0 \in \mathbb{E}_p^+$.

**Лемма.** *В окрестности точки $x = x_0$ нормальная производная фундаментальной матрицы решений* (4) *может быть представлена в виде*

$$\frac{\partial G(x, x_0)}{\partial n} = \widetilde{G}(x, x_0) + G^*(x, x_0), \tag{5}$$

*где* $\widetilde{G}(x, x_0)$, $G^*(x, x_0)$ — *диагональные матрицы порядка* $m$, *диагональные элементы которых имеют вид*

$$\widetilde{g}_j(x, x_0) = \frac{iC_k \sigma_j \nu}{\Gamma(1-\nu) \sin \nu\pi} \left( \frac{\sqrt{\lambda_j}}{2} \right)^{-\nu/2} \mathrm{B}\left( \frac{k}{2}, \frac{p}{2} \right) \times \\ \times (x_p, x_{p0})^{-k/2} \rho_{xx_0}^{1-p} \left[ \sum_{l=1}^{p} \cos(x_l, \rho_{xx_0}) \cos(x_l, n) \right], \tag{6}$$

$$g_j^*(x, x_0) = \mathrm{O}(\rho_{xx_0}^{-(p-2)}), \quad j = \overline{1, m}, \quad \rho_{xx_0}^2 = \sum_{l=1}^{p} (x_l - x_{l_0})^2. \tag{7}$$

С помощью этой леммы легко можно доказать, что $G(x, x_0)$ является фундаментальной матрицей решений системы (1) с особенностью в точке $x_0$.

В ходе доказательства получаем следующее предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{x_0\varepsilon}}\widetilde{G}(x,x_0)f(x)x_p^k\,dS_{x_0\varepsilon}=f(x_0). \tag{8}$$

**3. Интегральное представление.** Пусть вектор-функция $u(x)=\begin{pmatrix}u_1(x)\\ u_2(x)\\ \dots\\ u_m(x)\end{pmatrix}$, $u(x)\in C_B^2(D)\cap C^1(\overline{D})$, является решением системы (1) в области $D$ и точка $M_0(x_0)\in D$. Рассмотрим сферу $S_{x_0\varepsilon}$ с центром в точке $M_0$ и радиуса $\varepsilon$, такого, что $S_{x_0\varepsilon}\subset D$. Обозначим через $Q_{x_0\varepsilon}$ шар, ограниченный этой сферой. Ясно, что в области $D_\varepsilon=D\setminus\overline{Q}_{x_0\varepsilon}$ фундаментальная матрица решений (4) системы (1) принадлежит классу $C_B^2(D_\varepsilon)\cap C^1(\overline{D}_\varepsilon)$. Поэтому к матрицам $u(x)$ и $G(x,x_0)$ в этой области можно применить вторую формулу Грина для оператора $L_B$.

Учитывая, что $L_B[G(x,x_0)]=0$, $L_B[u(x)]=0$ в $D_\varepsilon$, получаем

$$\int_\Gamma\left[G(x,x_0)\frac{\partial u(x)}{\partial n}-\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial n}u(x)\right]x_p^k\,d\Gamma=$$
$$=\int_{S_{x_0\varepsilon}}\left[G(x,x_0)\frac{\partial u(x)}{\partial n}-\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial n}u(x)\right]x_p^k\,dS_{x_0\varepsilon}, \tag{9}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — внешняя нормаль к сфере $S_{x_0\varepsilon}$ и $\Gamma$.

Переходя в равенстве (9) к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом представлений (5), (6), (7) и предельного соотношения (8), получаем

$$u(x_0) = -\int_{\Gamma}\left[G(x,x_0)\frac{\partial u(x)}{\partial n} - \frac{\partial G(x,x_0)}{\partial n}u(x)\right] x_p^k\,d\Gamma. \qquad (10)$$

Таким образом, для любого решения из класса $C_B^2(D)\cap C^1(\overline{D})$ и любой точки $x_0 \in D$ имеет место интегральное представление (10).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимова Н. А. *О фундаментальной матрице решений одной B-эллиптической системы уравнений* // Материалы Второй всеросс. науч.-практ. конф, посв. памяти докт. физ.-мат. наук В. Ф. Волкодавова. – Самара: Изд-во ПГСГА, 2009. – С. 21-26.

**С. И. Калмыков**

*Институт прикладной математики ДВО РАН,*

*sergeykalmykov@inbox.ru*

# О ПОЛИНОМАХ, СВЯЗАННЫХ С БИНОМИАЛЬНЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

Объектом нашего исследования являются многочлены вида

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k f_k f_{n-k}\left(B_k(x+a)B_{n-k}(x+b) - B_k(x+a+b)B_{n-k}(x)\right), \qquad (1)$$